

算例 5-002

实体单元 – 静载下的直梁

问题描述

本例中，一个由实体单元模拟的直悬臂梁，承受在端部 3 个正交方向的单位力，和在端部关于 3 个正交方向单位弯矩，每个在一个不同的荷载工况内。在端部荷载方向的位移和手算结果进行了比较。

基本的几何，属性和荷载在 MacNeal and Harder 1985 中描述。此悬臂梁为 6-in 长，平行于 Z 方向 0.2-in 宽，平行于 Y 方向 0.1-in 宽。建立了 3 个不同的模型，每个有不同的剖分。模型 A、B 和 C 分别使用长方形，梯形和平行四边形单元的剖分。

个别的如 MacNeal and Harder 1985 中建议。模型 D 以一个 6x1 长方形剖分开始，然后将每个长方形分割为 2 个三角形。模型 E 以 6x1 的长方形单元开始，然后将每个长方形单元分割为 4 个三角形。在模型 D 和 E 中使用的单元没有在 MacNeal and Harder 1985 中。

需要注意此例是测试实体单元的一个极端的范例。实体单元一般不用来模拟具有 $n \times 1 \times 1$ 剖分形式的梁。

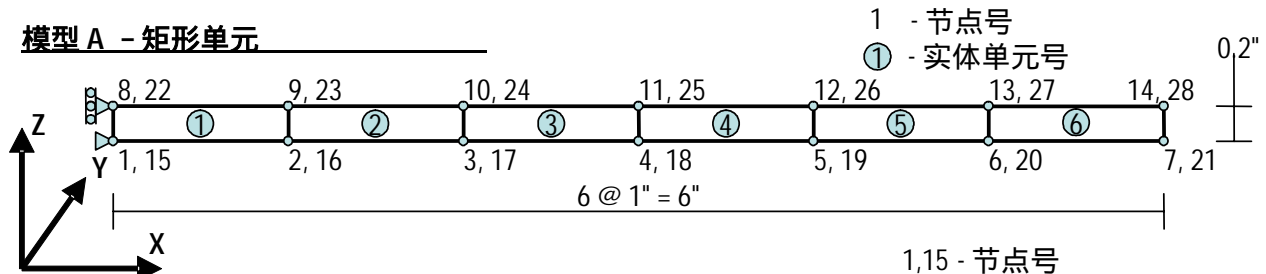
对于每个模型建立 6 个荷载工况。1 到 3 荷载工况在悬臂端分别施加了 X、Y 和 Z 方向的单位力荷载。4 到 6 荷载工况在悬臂端分别施加了 X、Y 和 Z 方向的单位弯矩荷载。弯矩是用力偶施加的。

使用基本的梁理论来得到手算解，假定在支座处没有泊松效应。在 SAP2000 中模拟的梁符合此假定。在固定段，所有节点所有自由度全部被约束，所有自由端节点指定了整体约束。因此 SAP2000 中的模型与手算的模型有一些轻微的不同，因为 SAP2000 的模型中梁的端部会产生轻微的局部泊松比影响。

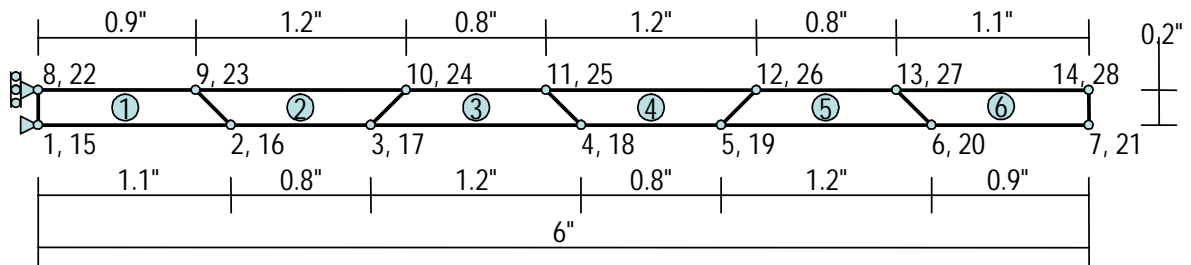
及节点 8 的 U_x , U_y , 和 R_z 自由度被约束。节点 8 的 U_z 自由度没有被约束，来避免在模型中施加不期望的泊松效应。而且，当梁被施加面内的剪力时，在节点 8 施加等于端部力的一半的面内力。施加在节点 8 的特殊荷载来模拟没有泊松效应的反力。

几何

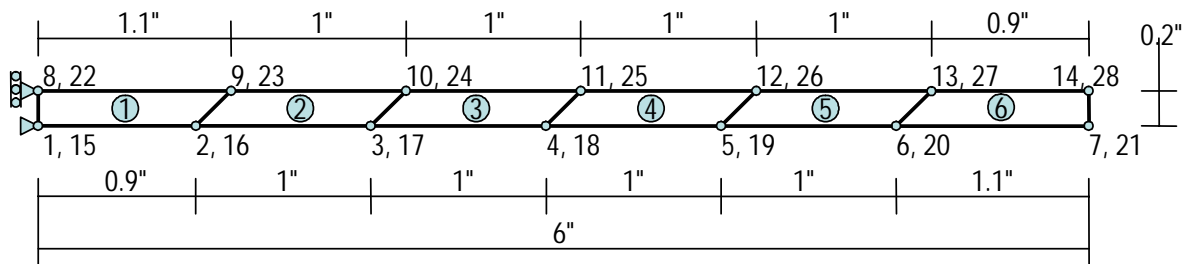
模型 A - 矩形单元



模型 B - 梯形单元



模型 C - 平行四边形单元



属性

$$E = 10,000,000 \text{ lb/in}^2$$

$$\nu = 0.3$$

$$G = 3,846,154 \text{ lb/in}^2$$

实体对象的厚度 (在 Y 方向) = 0.1 in

荷载

下表定义了施加于每一模型的荷载。

荷载工况	荷载类型	荷载
1	P_x 轴向延展	$F_x = +0.25 \text{ lb}$ 在节点 7, 14, 21 和 28
2	V_z 和 M_y 剪切弯曲	$F_z = +0.25 \text{ lb}$ 在节点 7, 14, 21 和 28
3	V_y 和 M_z 剪切弯曲	$F_y = +0.25 \text{ lb}$ 在节点 7, 14, 21 和 28
4	M_x 扭曲	$F_y = -2.5 \text{ lb}$ 在节点 7 和 21, 及 $F_y = +2.5 \text{ lb}$ 在节点 14 和 28
5	M_y 弯矩	$F_x = -2.5 \text{ lb}$ 在节点 7 和 21, 及 $F_x = +2.5 \text{ lb}$ 在节点 14 和 28
6	M_z 弯矩	$F_y = +5 \text{ lb}$ 在节点 7 和 14, 及 $F_y = -5 \text{ lb}$ 在节点 21 和 28

所测试 SAP2000 的技术特性

- 带有和不带有独立模型选项的实体对象弯曲
- 实体单元方面比的效应
- 实体单元从长方形的几何扭曲效应
- 节点力荷载

结果比较

SAP2000 分别给出了带有和不带有模型独立弯曲选项的结果。手算结果使用 Cook 和 Young 1985 第 244 页的单位荷载法。另外，使用 Roark 和 Young 1975 第 290 页表 20 的第 4 项来计算截面的扭转刚度 J 。手算解在 MacNeal and Harder 1985 中发表。

带有独立弯曲模型

荷载工况和类型	模型和单元形状	剖分	输出参数	SAP2000	手算解	误差
Case 1 P_x 轴向扩展	A 矩形	6 x 1 x 1	在节点 7, 14, 21 和 28 的平均值 U_x in	2.926E-05	3.000E-05	-2%
		30 x 1 x 1		2.985E-05		-1%
		30 x 4 x 8		2.984E-05		-1%
	B 梯形	6 x 1 x 1		2.966E-05		-1%
		30 x 1 x 1		2.985E-05		-1%
		30 x 4 x 8		2.985E-05		-1%
	C 平行四边形	6 x 1 x 1		2.965E-05		-1%
		30 x 1 x 1		2.985E-05		-1%
		30 x 4 x 8		2.985E-05		-1%
	A 矩形	6 x 1 x 1	在节点 7, 14, 21 和 28 的平均值 U_z in	0.1057	0.1081	-2%
		30 x 1 x 1		0.1077		0%
		30 x 4 x 8		0.1073		-1%
Case 2 V_z 和 M_y 剪切弯曲	B 梯形	6 x 1 x 1		0.0051		-95%
		30 x 1 x 1		0.1071		-1%
		30 x 4 x 8		0.1069		-1%
	C 平行四边形	6 x 1 x 1		0.0673		-38%
		30 x 1 x 1		0.1076		0%
		30 x 4 x 8		0.1072		-1%

带有独立弯曲模型

荷载工况 和类型	模型和单元 形状	剖分	输出参数	SAP2000	手算解	误差
Case 3 V_y 和 M_z 剪切弯曲	A 矩形	6 x 1 x 1	在节点 7, 14, 21 和 28 的平均 值 in	0.4203	0.4321	-3%
		30 x 1 x 1		0.4300		0%
		30 x 4 x 8		0.4286		-1%
	B 梯形	6 x 1 x 1		0.0129		-97%
		30 x 1 x 1		0.4060		-6%
		30 x 4 x 8		0.4246		-2%
	C 平行四边形	6 x 1 x 1		0.2276		-47%
		30 x 1 x 1		0.4257		-1%
		30 x 4 x 8		0.4280		-1%
	A 矩形	6 x 1 x 1	在节点 7, 14, 21 和 28 绝对值的 平均值 in	0.00280	0.00341	-18%
		30 x 1 x 1		0.00289		-15%
		30 x 4 x 8		0.00331		-3%
Case 4 M_x 扭曲	B 梯形	6 x 1 x 1		0.00172		-50%
		30 x 1 x 1		0.00276		-19%
		30 x 4 x 8		0.00330		-3%
	C 平行四边形	6 x 1 x 1		0.00255		-25%
		30 x 1 x 1		0.00288		-16%
		30 x 4 x 8		0.00331		-3%

PROGRAM NAME: SAP2000
REVISION NO.: 2

带有独立弯曲模型

荷载工况 和类型	模型和单元 形状	剖分	输出参数	SAP2000	手算解	误差
Case 5 M_y 弯矩	A 矩形	6 x 1 x 1	在节点 7, 14, 21 和 28 绝对值的 平均值 in	8.906E-04	9.000E-04	-1%
		30 x 1 x 1		8.981E-04		0%
		30 x 4 x 8		8.955E-04		0%
	B 梯形	6 x 1 x 1		3.240E-05		-96%
		30 x 1 x 1		8.930E-04		-1%
		30 x 4 x 8		8.921E-04		-1%
	C 平行四边形	6 x 1 x 1		6.369E-04		-29%
		30 x 1 x 1		8.976E-04		0%
		30 x 4 x 8		8.952E-04		-1%
Case 6 M_z 弯矩	A 矩形	6 x 1 x 1	在节点 7, 14, 21 和 28 绝对值的 平均值 in	0.00177	0.00180	-2%
		30 x 1 x 1		0.00179		-1%
		30 x 4 x 8		0.00179		-1%
	B 梯形	6 x 1 x 1		0.00004		-98%
		30 x 1 x 1		0.00169		-6%
		30 x 4 x 8		0.00177		-2%
	C 平行四边形	6 x 1 x 1		0.00112		-38%
		30 x 1 x 1		0.00178		-1%
		30 x 4 x 8		0.00179		-1%

不带有独立弯曲模型

荷载工况 和类型	模型和单元 形状	剖分	输出参数	SAP2000	手算解	误差
Case 1 P_x 轴向扩展	A 矩形	6 x 1 x 1	在节点 7, 14, 21 和 28 的平均 值 in	2.914E-05	3.000E-05	-3%
		30 x 1 x 1		2.982E-05		-1%
		240 x 4 x 8		2.995E-05		0%
	B 梯形	6 x 1 x 1		2.915E-05		-3%
		30 x 1 x 1		2.982E-05		-1%
		240 x 4 x 8		2.995E-05		0%
	C 平行四边形	6 x 1 x 1		2.915E-05		-3%
		30 x 1 x 1		2.982E-05		-1%
		240 x 4 x 8		2.995E-05		0%
	A 矩形	6 x 1 x 1	在节点 7, 14, 21 和 28 的平均 值 in	0.0100	0.1081	-91%
		30 x 1 x 1		0.0718		-34%
		240 x 4 x 8		0.1070		-1%
Case 2 V_z and M_y 剪切弯曲	B 梯形	6 x 1 x 1		0.0028		-97%
		30 x 1 x 1		0.0452		-58%
		240 x 4 x 8		0.1047		-3%
	C 平行四边形	6 x 1 x 1		0.0034		-97%
		30 x 1 x 1		0.0296		-73%
		240 x 4 x 8		0.1016		-6%

不带有独立弯曲模型

荷载工况 和类型	模型和单元 形状	剖分	输出参数	SAP2000	手算解	误差
Case 3 V_y and M_z 剪切弯曲	A 矩形	6 x 1 x 1	在节点 7, 14, 21 和 28 的平均 值 in	0.0109	0.4321	-97%
		30 x 1 x 1		0.1558		-64%
		240 x 4 x 8		0.4168		-4%
	B 梯形	6 x 1 x 1		0.0045		-99%
		30 x 1 x 1		0.1345		-69%
		240 x 4 x 8		0.4135		-4%
	C 平行四边形	6 x 1 x 1		0.0062		-99%
		30 x 1 x 1		0.1169		-73%
		240 x 4 x 8		0.4084		-5%
Case 4 M_x 扭曲 t	A 矩形	6 x 1 x 1	在节点 7, 14, 21 和 28 绝对值的 平均值 in	0.00280	0.00341	-18%
		30 x 1 x 1		0.00289		-15%
		240 x 4 x 8		0.00331		-3%
	B 梯形	6 x 1 x 1		0.00159		-53%
		30 x 1 x 1		0.00183		-46%
		240 x 4 x 8		0.00322		-6%
	C 平行四边形	6 x 1 x 1		0.00108		-68%
		30 x 1 x 1		0.00320		-6%
		240 x 4 x 8		0.00310		-9%

不带有独立弯曲模型

荷载工况 和类型	模型和单元 形状	剖分	输出参数	SAP2000	手算解	误差
Case 5 M_y 弯矩	A 矩形	6 x 1 x 1	在节点 7, 14, 21 和 28 绝对值的 平均值 in	8.370E-05	9.000E-04	-91%
		30 x 1 x 1		5.983E-04		-34%
		240 x 4 x 8		8.913E-04		-1%
	B 梯形	6 x 1 x 1		1.880E-05		-98%
		30 x 1 x 1		3.711E-04		-59%
		240 x 4 x 8		8.713E-04		-3%
	C 平行四边形	6 x 1 x 1		2.520E-05		-97%
		30 x 1 x 1		2.199E-04		-76%
		240 x 4 x 8		8.417E-04		-6%
Case 6 M_z 弯矩	A 矩形	6 x 1 x 1	在节点 7, 14, 21 和 28 绝对值的 平均值 in	0.00005	0.00180	-97%
		30 x 1 x 1		0.00065		-64%
		240 x 4 x 8		0.00174		-3%
	B 梯形	6 x 1 x 1		0.00002		-99%
		30 x 1 x 1		0.00056		-69%
		240 x 4 x 8		0.00172		-4%
	C 平行四边形	6 x 1 x 1		0.00002		-99%
		30 x 1 x 1		0.00047		-74%
		240 x 4 x 8		0.00170		-6%

计算模型文件: Example 5-002a1-incomp, Example 5-002a1-comp,
Example 5-002a2- incomp, Example 5-002a2- comp,
Example 5-002a3- incomp, Example 5-002a3- comp,
Example 5-002b1- incomp, Example 5-002b1- comp,
Example 5-002b2- incomp, Example 5-002b2- comp,
Example 5-002b3- incomp, Example 5-002b3- comp,
Example 5-002c1- incomp, Example 5-002c1- comp,
Example 5-002c2- incomp, Example 5-002c2- comp,
Example 5-002c3- incomp, Example 5-002c3- comp

轴向扩展结果

Example 5-001 所校验的问题显示了与理论结果完全一致的结果。因此，可以很合理的预见轴向扩展问题在 Example 5-002 中将得到同样精确的结果。这些结果的原因是固定支撑将一些泊松比影响带入到了最终的结果中。

具有独立弯曲模式的模型

这一节所讨论的是将具有独立弯曲模式选项应用到模型中。一般而言，具有梯形和平行四边形单元形状模型对单元面的比例比矩形单元形式更加敏感。

对于所有的单元形状，模型的弯曲表现可以根据沿梁长度方向的剖分细化而得到加强。

对于所有的单元形状，扭曲反应的结果可以根据梁截面 4X8 的横截面剖分细化而得到加强。

不具有独立弯曲模式的模型

这一节所讨论的是将不具有独立弯曲模式选项应用到模型中。不具有弯曲独立模式的模型为了得到可以接受的、或在一些情况下接近可以接受的结果需要进行 240X4X8 的剖分形式。这得到实体单元相当于 1:1:1 的面比例。

一般而言，不使用弯曲独立模式选项的模型对于单元面比例的敏感度比使用弯曲独立模式选项的模型更加敏感一些。另外，不使用弯曲独立选项的模型要得到可以接受的结果需要更大的单元细化程度。

结论

对于 6X1X1 剖分的模型，矩形单元下具有独立弯曲模式选项的模型可以得到除了扭曲荷载工况下所有工况可以接受的结果。其它 6X1X1 剖分的模型除了轴向扩展外所有荷载工况下不可以接受的结果。所有模型的结果精度都随着剖分细度的加强而提高。


弯曲结果将随着梁长度方向的剖分细化而加强。

可以接受的扭曲结果，是在每个方向和横截面方向剖分为 4 个单元的情况下，并在梁横截面和单元面比例趋向 1:1 时的情况下获得的。

不具备弯曲独立模式选项模型可以接受的结果是在使用接近于 1:1:1 实体元面比例的情况下，即把模型剖分为近似等边的立方体的情况下得到的。 ，不使用弯曲独立选项的模型要得到可以接受的结果需要更大的单元细化程度。

总之，弯曲独立模式选项应该在实体对象模型中一直使用。

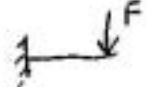
手算过程

Load Case 1 - Axial Extension 

$$\Delta = \int_0^L \frac{PP}{EA} dx = \int_0^L \frac{P}{EA} dx = \frac{PL}{EA}$$

$$\Delta = \frac{1 \times 6}{10,000,000 \times 0.2 \times 0.1}$$

$$\Delta = 0.00003 \text{ in}$$

Load Case 2 - In-Plane Bending and Shear 

$$\Delta = \int_0^L \frac{mM}{EI} dx + \int_0^L \frac{vV}{GA_v} dx$$

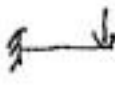
$$= \int_0^L \frac{Fx^2}{EI} dx + \int_0^L \frac{F dx}{GA_v}$$

$$= \frac{FL^3}{3EI} + \frac{FL}{GA_v}$$

$$= \frac{1 \times 6^3}{3 \times 10,000,000 \times \left(\frac{0.1 \times 0.2^3}{12}\right)} + \frac{1 \times 6}{3846154 \times \left(\frac{5}{6} \times 0.2 \times 0.1\right)}$$

$$\Delta = 0.10800 + 0.00009$$

$$\Delta = 0.10809 \text{ in}$$

Load case 3 - Out-of-Plane Bending and Shear 


$$\Delta = \frac{FL^3}{3EI} + \frac{FL}{GA_v}$$

$$\Delta = \frac{1 \times 6^3}{3 \times 10,000,000 \times \left(\frac{0.2 \times 0.1^3}{12} \right)} + \frac{1 \times 6}{3846154 \times \left(\frac{5}{6} \times 0.2 \times 0.1 \right)}$$

$$\Delta = 0.43200 + 0.00009$$

$$\Delta = 0.43209 \text{ in}$$

Load Case 4 - Twist

$$\Theta_x = \int_0^L \frac{t}{GJ} dx = \int_0^L \frac{T}{GJ} dx = \frac{TL}{GJ}$$


From: Roark and Young 1975

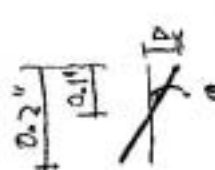
Item 4, Table 20, page 290

$$J = \left(\frac{b}{2} \right) \left(\frac{t}{2} \right)^3 \left[\frac{16}{3} - 3.36 \left(\frac{t/2}{b/2} \right) \left(1 - \frac{(t/2)^4}{12(b/2)^4} \right) \right]$$

$$J = (0.1)(0.05)^3 \left[\frac{16}{3} - 3.36 \left(\frac{0.05}{0.1} \right) \left(1 - \frac{0.5^4}{12 \times 0.1^4} \right) \right]$$

$$J = 0.000045776$$

$$\Theta_x = \frac{1 \times 6}{3846154 \times 0.000045776} = 0.03408 \text{ radians}$$



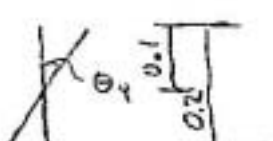
$\Delta_y = 0.1 \sin \Theta = 0.1 \Theta = 0.1 \times 0.03408$

$$\Delta_y = 0.00341 \text{ in}$$

Load Case 5 - In Plane Moment

$$\theta_y = \int_0^L \frac{mM}{EI} dx = \int_0^L \frac{M}{EI} dx = \frac{ML}{EI}$$

$$\theta_y = \frac{1 \times 6}{10,000,000 \times \left(\frac{0.1 \times 0.2^3}{12} \right)} = 0.00900 \text{ radians}$$

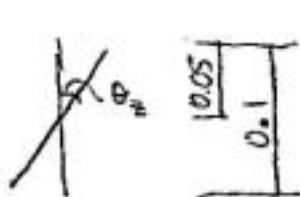


$$\Delta_x = 0.1 \sin \theta_y = 0.1 \sin(0.00900 \text{ rad})$$

$$\Delta_x = 0.00090 \text{ in}$$

Load Case 6 - Out of Plane Moment

$$\theta_z = \frac{ML}{EI} = \frac{1 \times 6}{10,000,000 \times \left(\frac{0.2 \times 0.1^3}{12} \right)} = 0.03600 \text{ radians}$$



$$\Delta_x = 0.05 \sin \theta_z = 0.05 \sin(0.03600 \text{ rad})$$

$$\Delta_x = 0.00180 \text{ in}$$